Méthodes d'interpolation

Interpolation spatiale

- **Etant donné un ensemble de données**

  $(x_0, y_0), (x_1,y_1), \ldots, (x_n,y_n)$,

  on cherche à obtenir un polynôme de degré "n" **P(x)** tel que

  $P(x_k) = y_k$ **pour k = 0, …, n.**
- **Interpolation polynômiale**
  - Polynômes de Lagrange
  - Splines cubiques
- **Interpolation de champs bi-dimensionnels**
  - Interpolation bilinéaire et bicubique

Interpolation polynômiale: méthode de van der Monde

Considérons: $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

Interpolation conduit au système d'équations

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n, \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n, \\ &\vdots \quad \vdots \\ y_n &= a_n + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n, \end{aligned}$$

Sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Interpolation est dite globale si P(x) passe par tous les points
- Système d'équations linéaires est souvent difficile à résoudre et mal conditionné.

Polynômes de Lagrange

Interpolation linéaire passant par les points (x_0, y_0) et (x_1,y_1) peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - x_0) + b(x - x_1) \\ &= \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} y_1 + \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} y_0 \end{aligned}$$

Cas quadratique:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_0-x_2)(x_0-x_1)} y_0 \end{aligned}$$

Définition d'un polynôme de Lagrange d'ordre "n":

$$L_j^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}$$

Interpolation de Lagrange d'ordre "n":

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j^{(n)}(x)\, y_j$$

Interpolation d'Hermite:

* Polynôme P(x) d'ordre (2n-1) tel que

$$P(x_i) = y_i$$

$$\frac{dP}{dx}(x_i) = y_i'$$

où y' est la dérivée de y.

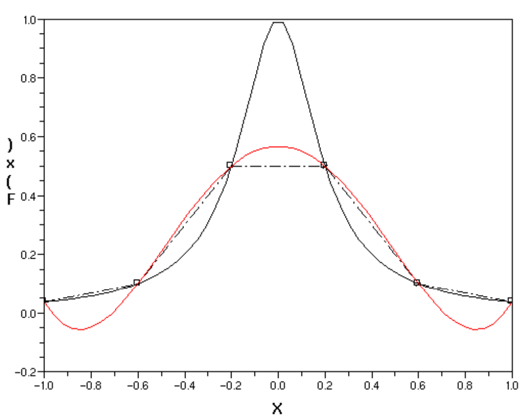
Remarques sur l'interpolation globale

- Evaluation de P(x) est coûteuse puisque tous les points interviennent
- Polynôme obtenu satisfait exactement les données et est conséquemment extrêmement sensible aux erreurs de ces données

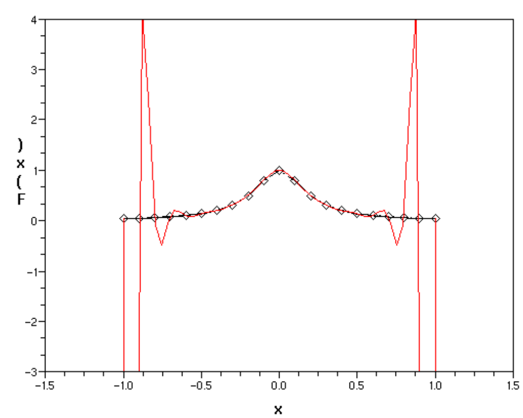
Exemple: fonction $f(x) = 1/(1 + 25\, x^2)$

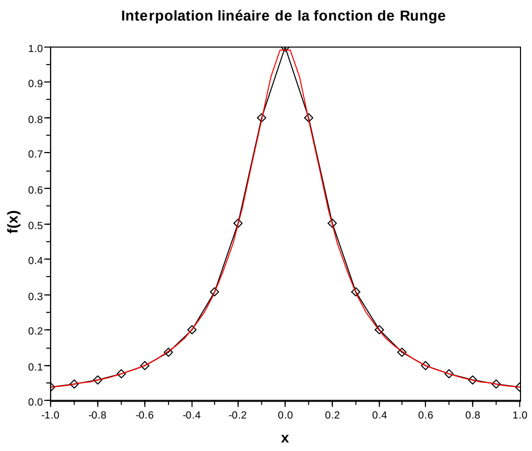
On peut montrer que $p_n \to \infty$
lorsque $n \to \infty$ dans l'intervalle $0.726\ldots \le |x| < 1$.

Interpolation polynomiale de la fonction de Runge (ordre 5)



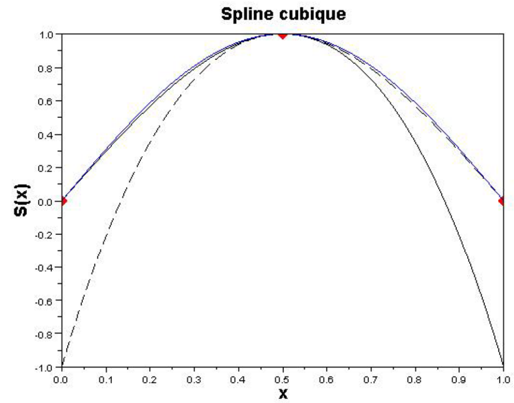
Interpolation polynomiale de la fonction de Runge (ordre 20)





SCA-4011 Méthodes numériques

Interpolation polynômiale par morceaux: les splines cubiques



Interpolation polynômiale par morceaux: les splines cubiques

- Polynômes d'ordre moins élevé qui ne requièrent qu'un nombre limité de points
- Spline cubique ne requiert que les valeurs (x_i,y_i) en "n+1" points et doit satisfaire les conditions suivantes:

1. Pour j = 0, …, n-1 $\quad S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3$
2. Pour j = 0, …, n-1 $\quad S_j(x_j) = y_j$ et en plus $S_{n-1}(x_n) = y_n$
3. Pour j = 0, …, n-2 $\quad S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$
4. Pour j = 0, …, n-2 $\quad S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$
5. Pour j = 0, …, n-2 $\quad S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$

- Conditions-frontières supplémentaires:

$S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ ou $S'(x_0) = y'(x_0)$ et $S'(x_n) = y'(x_n)$

SCA-4011 Méthodes numériques

$$S_{j+1}(x) = a_{j+1} + b_{j+1}(x-x_{j+1}) + c_{j+1}(x-x_{j+1})^2 + d_{j+1}(x-x_{j+1})^3$$
$$S_j(x) = a_j + b_j(x-x_j) + c_j(x-x_j)^2 + d_j(x-x_j)^3$$

1. Interpolation: $S_j(x_j) = y_j \Rightarrow a_j = y_j$ pour j = 0, …, n-1
   $S_{n-1}(x_n) = y_n$
2. Continuité: $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ pour j = 0, …, n-2
   $$a_{j+1} = a_j + b_j(x_{j+1}-x_j) + c_j(x_{j+1}-x_j)^2 + d_j(x_{j+1}-x_j)^3$$
3. Continuité des dérivées premières
   $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ pour j = 0, …, n-2
   $$b_{j+1} = b_j + 2c_j(x_{j+1}-x_j) + 3d_j(x_{j+1}-x_j)^2$$
4. Continuité des dérivées secondes
   $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ pour j = 0, …, n-2
   $$c_{j+1} = 2c_j + 6d_j(x_{j+1}-x_j)$$

SCA-4011 Méthodes numériques

Conditions aux frontières: $S''_0(x_0) = 0$
impliquent que

$$2c_0 = 0$$

$S''_{n-1}(x_n) = 0$ implique que

$$2c_{n-1} + 6\, d_{n-1}(x_n - x_{n-1}) = 0$$

- **Nombre de paramètres à estimer: 4n**
  - Interpolation fournit (n+1) contraintes
  - Continuité de S(x), de S'(x) et de S"(x) imposent 3(n-1) contraintes.
  - Deux conditions frontières supplémentaires
  - Total = (n+1) +3(n-1) +2 = 4n.
- **Spline permet d'obtenir une représentation différentiable d'un champ.**

Exemple

- **On considère trois points 0., 0.5 et 1.0 pour lesquels**

$$f(0) = 0. \quad f(0.5) = 1. \quad f(1) = 0.$$

- **La spline cubique prend alors la forme:**

$$S(x) = \begin{cases} a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 & 0 \le x \le 0.5 \\ a_1 + b_1(x-0.5) + c_1(x-0.5)^2 + d_1(x-0.5)^3 & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

- **Système de 8 équations doit être résolu pour trouver les coefficients**

SCA-4011 Méthodes numériques

Système d'équations

$$\begin{array}{ll|c} \textbf{Valeurs} & & \\ \textbf{interpolées} & & \\ & & \\ & S(x) & \\ \textbf{Continuité} & S'(x) & \\ & S''(x) & \\ \textbf{Cond.-Front.} & S''(0) & \\ & S''(1) & \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0.75 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Trois équations pour les valeurs d'interpolation**
- **Condition de continuité en x = 0.5**
- **Continuité de la dérivée en x = 0.5**
- **Continuité de la dérivée seconde en x = 0.5**
- **Conditions aux frontières libres S''(0) = 0 et S'' (1) = 0**

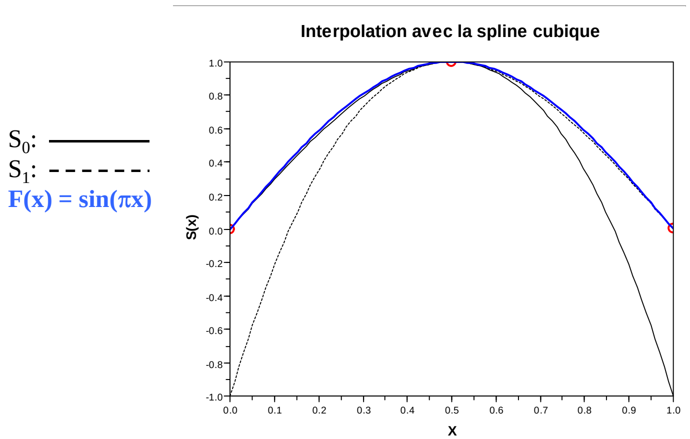
SCA-4011 Méthodes numériques

Résultat

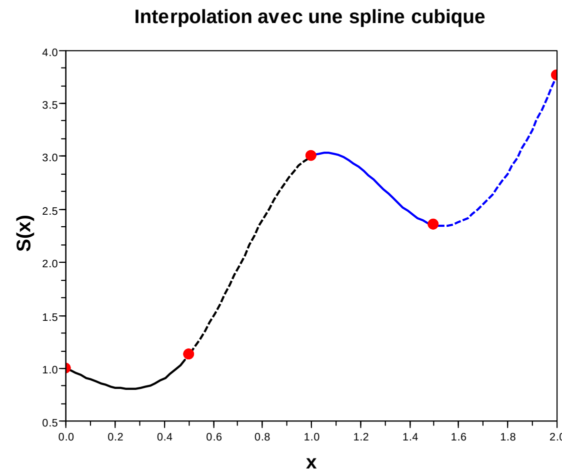
- **Solution du problème dans SCILAB**
  - $a_0 = 0$, $b_0 = 3$, $c_0 = 0$, $d_0 = -4$
  - $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = -6$, $d_1 = 4$
- **Matrice S définissant les conditions de la spline cubique est bien conditionnée:**
  - cond(A) = 31

SCA-4011 Méthodes numériques

Exemple d’interpolation avec la spline cubique

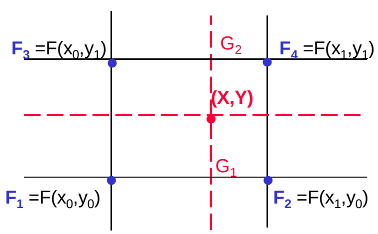


Autre problème



Interpolation de champs bi-dimensionnels

- **Interpolation bilinéaire**
  - Champ F(x,y) définis aux points (x_i,y_i) que l’on désire interpoler au point (X,Y) tel que $x_0 \le X < x_1$ et $y_0 \le Y < y_1$



$$G_1 = \frac{(X-x_0)}{(x_1-x_0)}F_2 + \frac{(x_1-X)}{(x_1-x_0)}F_1 \qquad G_2 = \frac{(X-x_0)}{(x_1-x_0)}F_4 + \frac{(x_1-X)}{(x_1-x_0)}F_{31}$$

Interpolation bilinéaire

$$F(X,Y) = \frac{(Y-y_0)}{(y_1-y_0)}G_2 + \frac{(y_1-Y)}{(y_1-y_0)}G_1$$

$$= \frac{(Y-y_0)}{(y_1-y_0)}\left[\frac{(X-x_0)}{(x_1-x_0)}F_4 + \frac{(x_1-X)}{(x_1-x_0)}F_3\right] + \frac{(y_1-Y)}{(y_1-y_0)}\left[\frac{(X-x_0)}{(x_1-x_0)}F_2 + \frac{(x_1-X)}{(x_1-x_0)}F_1\right]$$

$$\equiv \frac{1}{(x_1-x_0)(y_1-y_0)}\left[\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3 + \alpha_4 F_4\right]$$

où $\alpha_1 = (y_1 - Y)(x_1 - X)$, $\alpha_2 = (y_1 - Y)(X - x_0)$,
$\alpha_3 = (Y - y_0)(x_1 - X)$, $\alpha_4 = (Y - y_0)(X - x_0)$,

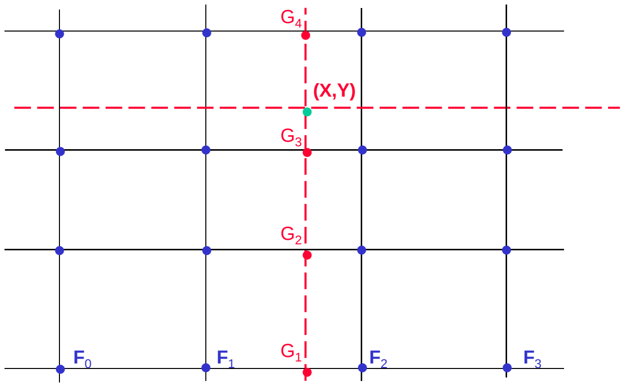
Série de Taylor de F(X,Y)

$$F(X,Y) = F(x_0,y_0) + X\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) + Y\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(X^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2XY\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + Y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right)$$

Interpolation bicubique de Lagrange

Requiert une grille de 4×4 et donc 16 valeurs de F(x,y)



Interpolation bicubique de Lagrange

$$G_1 = F_0 \frac{(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + F_2 \frac{(X-x_1)(X-x_0)(X-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_0)(x_2-x_3)} + F_3 \frac{(X-x_1)(X-x_2)(X-x_0)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_0)} + F_1 \frac{(X-x_0)(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

Bicubique de Lagrange fait donc intervenir des termes d'ordre 6 dans le développement polynômial de F(x,y)

Intégration numérique

Intégration numérique

Solution approximée à une intégrale de la forme

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Deux situations

* fonction n'est connue qu'en un nombre de points donnés;
* une forme analytique de f(x) est connue

Dérivation numérique est plus difficile en ce qu'elle tend à amplifier l'erreur alors que l'intégration tend à réduire cette erreur.

Quadrature: schéma d'intégration d'une fonction

Méthode du rectangle

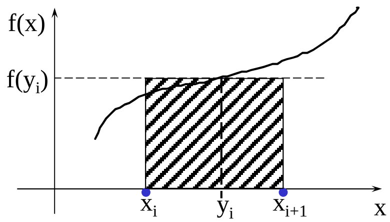
Considère que [a,b] est partitionné en sous-intervalles

$I_i = [x_i, x_{i+1}]$, pour i = 1, …, n

$x_1 = a$, $x_{n+1} = b$ et $h_i = x_{i+1} - x_i$

Donc

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$



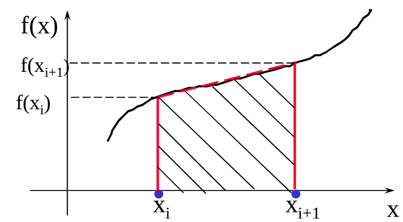
$$I_i \cong h_i f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = f(y_i)h_i$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\cong R(f) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)h_i$$

Méthode du trapèze

- **Utilise les valeurs aux points x_i et x_{i+1}**



$$I_i = h_i \frac{\left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)}{2}$$

$$I \cong T(f) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\left(f(x_i) + f(_{i+1})\right)}{2}$$

Précision de la méthode du rectangle

Développement en série de Taylor au voisinage de y_i:

$$f(x) = f(y_i) + (x-y_i)f'(y_i) + \tfrac{1}{2}(x-y_i)^2 f''(y_i) + \tfrac{1}{6}(x-y_i)^3 f'''(y_i)$$
$$+ \tfrac{1}{24}(x-y_i)^4 f^{(iv)}(y_i) + O((x-y_i)^5)$$

Intégration analytique de cette série:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = h_i f(y_i) + \frac{h_i^3}{24} f''(y_i) + \frac{h_i^5}{1920} f^{(iv)}(y_i) + O(h_i^7)$$

car les termes impairs ont une intégrale nulle.

Erreur totale sur l'intégrale est:

$$E_{rect.} = +\frac{h_i^3}{24} f''(y_i) + \frac{h_i^5}{1920} f^{(iv)}(y_i) + O(h_i^7)$$
$$= h_i^3 A + h_i^5 B + O(h_i^7)$$

Précision de la méthode du trapèze

Développement en série de Taylor au voisinage de y_i:

$$f(x_i) = f(y_i) - \frac{h_i}{2} f'(y_i) + \tfrac{1}{8} h_i^2 f''(y_i) - \tfrac{1}{48} h_i^3 f'''(y_i) + \tfrac{1}{384} h_i^4 f^{(iv)}(y_i) + O(h_i^5)$$

$$f(x_{i+1}) = f(y_i) + \frac{h_i}{2} f'(y_i) + \tfrac{1}{8} h_i^2 f''(y_i) + \tfrac{1}{48} h_i^3 f'''(y_i) + \tfrac{1}{384} h_i^4 f^{(iv)}(y_i) + O(h_i^5)$$

Donc:

$$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = f(y_i) + \tfrac{1}{8} h_i^2 f''(y_i) + \tfrac{1}{384} h_i^4 f^{(iv)}(y_i) + O(h_i^6)$$

Intégration analytique de cette série:

$$I_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx = h_i \frac{(f(x_i) + f(x_{i+1}))}{2} - \frac{h_i^3}{12} f''(y_i) - \frac{h_i^5}{480} f^{(iv)}(y_i) + O(h_i^7)$$

Erreur: $E_{trap.} = -2Ah_i^3 - 4Bh_i^5 + O(h_i^7)$

Méthode du rectangle est donc plus précise.

Règle de Simpson

Combinaison de la règle du rectangle et de celle du trapèze de manière à annuler le terme d'erreur d'ordre O(h^3)

$$S(f) = \frac{2}{3}R(f) + \frac{1}{3}T(f)$$

S(f) est la *règle de Simpson* qui est donc

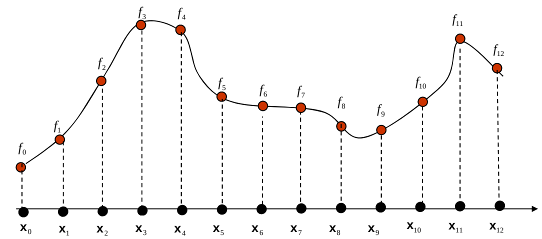
$$S(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right] \qquad (1)$$

Le terme d'erreur est alors d'ordre O(h^5).

- Règle du trapèze et règle de Simpson sont toutes deux des formules dites de *Newton-Cotes*
- Note: la règle de Simpson requiert une évaluation au point $(x_i + x_{i+1})/2$
- Eq.(1) définit $h_i = (x_{i+1} - x_i) = 2h$

Règles composées

- **Pour intégrer sur un intervalle [a,b],**
  - Problème est discrétisé sur 2m+1 points de grille, n =0, …,N=2m



- **Règle de Simpson sur le sous-intervalle** $[\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+2}]$

$$\int_{\mathbf{x}_n}^{\mathbf{x}_{n+2}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2}\right] \qquad h = (\mathbf{x}_{2m} - \mathbf{x}_0)/2m$$

Règle composée de Simpson

- **Intégration sur tout l'intervalle** $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{2m}]$

$$\int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_{2m}} f(x)dx = \sum_{n=1}^{m} \frac{h}{3}\left(f_{2n-2} + 4f_{2n-1} + f_{2n}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 2\sum_{n=1}^{m-1} f_{2n} + 4\sum_{n=1}^{m} f_{2n-1} + f_{2m}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{2m-2} + 4f_{2m-1} + f_{2m}\right)$$

- **Règle de Simpson requérant 3 points, ceci nécessite 2m sous-intervalles tels que**

$$h = (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \Delta\mathbf{x}$$

Exercice: dériver la règle composée pour la méthode du trapèze

Conclusion

- Interpolation polynômiale permet d'obtenir une fonction qui s'ajuste exactement aux données.
- Interpolation locale avec splines cubiques permet d'obtenir une représentation locale qui présente l'avantage d'être continue et différentiable.
- Intégration numérique: évaluation de la précision atteinte avec une quadrature particulière.